

全品高考

第三轮专题

主編：肖德好

数学 听课手册

???

1997, 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2003, 2004, 2005, 2006, 2007, 2008, 2009, 2010, 2011, 2012, 2013, 2014, 2015, 2016, 2017, 2018, 2019, 2020, 2021, 2022, 2023, 2024, 2025, 2026, 2027, 2028, 2029, 2030, 2031, 2032, 2033, 2034, 2035, 2036, 2037, 2038, 2039, 2040, 2041, 2042, 2043, 2044, 2045, 2046, 2047, 2048, 2049, 2050, 2051, 2052, 2053, 2054, 2055, 2056, 2057, 2058, 2059, 2060, 2061, 2062, 2063, 2064, 2065, 2066, 2067, 2068, 2069, 2070, 2071, 2072, 2073, 2074, 2075, 2076, 2077, 2078, 2079, 2080, 2081, 2082, 2083, 2084, 2085, 2086, 2087, 2088, 2089, 2090, 2091, 2092, 2093, 2094, 2095, 2096, 2097, 2098, 2099, 2100, 2101, 2102, 2103, 2104, 2105, 2106, 2107, 2108, 2109, 2110, 2111, 2112, 2113, 2114, 2115, 2116, 2117, 2118, 2119, 2120, 2121, 2122, 2123, 2124, 2125, 2126, 2127, 2128, 2129, 2130, 2131, 2132, 2133, 2134, 2135, 2136, 2137, 2138, 2139, 2140, 2141, 2142, 2143, 2144, 2145, 2146, 2147, 2148, 2149, 2150, 2151, 2152, 2153, 2154, 2155, 2156, 2157, 2158, 2159, 2160, 2161, 2162, 2163, 2164, 2165, 2166, 2167, 2168, 2169, 2170, 2171, 2172, 2173, 2174, 2175, 2176, 2177, 2178, 2179, 2180, 2181, 2182, 2183, 2184, 2185, 2186, 2187, 2188, 2189, 2190, 2191, 2192, 2193, 2194, 2195, 2196, 2197, 2198, 2199, 2200, 2201, 2202, 2203, 2204, 2205, 2206, 2207, 2208, 2209, 2210, 2211, 2212, 2213, 2214, 2215, 2216, 2217, 2218, 2219, 2220, 2221, 2222, 2223, 2224, 2225, 2226, 2227, 2228, 2229, 2230, 2231, 2232, 2233, 2234, 2235, 2236, 2237, 2238, 2239, 2240, 2241, 2242, 2243, 2244, 2245, 2246, 2247, 2248, 2249, 2250, 2251, 2252, 2253, 2254, 2255, 2256, 2257, 2258, 2259, 2260, 2261, 2262, 2263, 2264, 2265, 2266, 2267, 2268, 2269, 2270, 2271, 2272, 2273, 2274, 2275, 2276, 2277, 2278, 2279, 2280, 2281, 2282, 2283, 2284, 2285, 2286, 2287, 2288, 2289, 2290, 2291, 2292, 2293, 2294, 2295, 2296, 2297, 2298, 2299, 2300, 2301, 2302, 2303, 2304, 2305, 2306, 2307, 2308, 2309, 2310, 2311, 2312, 2313, 2314, 2315, 2316, 2317, 2318, 2319, 2320, 2321, 2322, 2323, 2324, 2325, 2326, 2327, 2328, 2329, 2330, 2331, 2332, 2333, 2334, 2335, 2336, 2337, 2338, 2339, 2340, 2341, 2342, 2343, 2344, 2345, 2346, 2347, 2348, 2349, 2350, 2351, 2352, 2353, 2354, 2355, 2356, 2357, 2358, 2359, 2360, 2361, 2362, 2363, 2364, 2365, 2366, 2367, 2368, 2369, 2370, 2371, 2372, 2373, 2374, 2375, 2376, 2377, 2378, 2379, 2380, 2381, 2382, 2383, 2384, 2385, 2386, 2387, 2388, 2389, 2390, 2391, 2392, 2393, 2394, 2395, 2396, 2397, 2398, 2399, 2400, 2401, 2402, 2403, 2404, 2405, 2406, 2407, 2408, 2409, 2410, 2411, 2412, 2413, 2414, 2415, 2416, 2417, 2418, 2419, 2420, 2421, 2422, 2423, 2424, 2425, 2426, 2427, 2428, 2429, 2430, 2431, 2432, 2433, 2434, 2435, 2436, 2437, 2438, 2439, 2440, 2441, 2442, 2443, 2444, 2445, 2446, 2447, 2448, 2449, 2450, 2451, 2452, 2453, 2454, 2455, 2456, 2457, 2458, 2459, 2460, 2461, 2462, 2463, 2464, 2465, 2466, 2467, 2468, 2469, 2470, 2471, 2472, 2473, 2474, 2475, 2476, 2477, 2478, 2479, 2480, 2481, 2482, 2483, 2484, 2485, 2486, 2487, 2488, 2489, 2490, 2491, 2492, 2493, 2494, 2495, 2496, 2497, 2498, 2499, 2500, 2501, 2502, 2503, 2504, 2505, 2506, 2507, 2508, 2509, 2510, 2511, 2512, 2513, 2514, 2515, 2516, 2517, 2518, 2519, 2520, 2521, 2522, 2523, 2524, 2525, 2526, 2527, 2528, 2529, 2530, 2531, 2532, 2533, 2534, 2535, 2536, 2537, 2538, 2539, 2540, 2541, 2542, 2543, 2544, 2545, 2546, 2547, 2548, 2549, 2550, 2551, 2552, 2553, 2554, 2555, 2556, 2557, 2558, 2559, 2560, 2561, 2562, 2563, 2564, 2565, 2566, 2567, 2568, 2569, 2570, 2571, 2572, 2573, 2574, 2575, 2576, 2577, 2578, 2579, 2580, 2581, 2582, 2583, 2584, 2585, 2586, 2587, 2588, 2589, 2590, 2591, 2592, 2593, 2594, 2595, 2596, 2597, 2598, 2599, 2600, 2601, 2602, 2603, 2604, 2605, 2606, 2607, 2608, 2609, 2610, 2611, 2612, 2613, 2614, 2615, 2616, 2617, 2618, 2619, 2620, 2621, 2622, 2623, 2624, 2625, 2626, 2627, 2628, 2629, 2630, 2631, 2632, 2633, 2634, 2635, 2636, 2637, 2638, 2639, 2640, 2641, 2642, 2643, 2644, 2645, 2646, 2647, 2648, 2649, 2650, 2651, 2652, 2653, 2654, 2655, 2656, 2657, 2658, 2659, 2660, 2661, 2662, 2663, 2664, 2665, 2666, 2667, 2668, 2669, 2670, 2671, 2672, 2673, 2674, 2675, 2676, 2677, 2678, 26

使 $f(x) > 0$ 的区间为 $(-\infty, -2)$ 和 $(1, +\infty)$; 使 $f(x) < 0$ 的区间为 $(-2, 1)$ 和 $(3, +\infty)$.

Keywords: *workplace spirituality, organizational commitment, organizational trust, organizational identification, organizational citizenship behavior, organizational justice, organizational support, organizational identification, organizational trust, organizational justice, organizational support, organizational identification, organizational trust, organizational justice, organizational support*

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
---	---	---	---	---	---	---	---	---	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	----	-----

$y = f(x)$ 的解的个数为 n 个, 则 $y = f(x) + A$ 的解的个数为 n 个, $A > 0$ 向上, $A < 0$ 向下

二元一次不等式 $Ax + By + C > 0$ 表示的平面区域是直线 $Ax + By + C = 0$ 某一侧的所有点组成的集合，它是半平面.

[illegible]
$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (a, b)$$

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (a, b)$$

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (a, b)$$

[Home](#)
[About Us](#)
[Contact Us](#)
[Privacy Policy](#)
[Terms of Service](#)
[FAQ](#)
[Sitemap](#)

 延边教育出版社

全品高考第二轮专题 数学

高三考生

透析命题 聚焦答卷

理想的高考成绩

二轮复习

考试多，时间紧
题量大，做不完？

《全品高考第二轮专题》—— **精 准 透**



6大模块统领二轮复习

7个综合实现高考进阶

2页作业限时限量

8个技能专题突破高分

二轮复习
有的放矢

跳出题海
精准备考

只做真正的 **新课标 新结构**

精选试题，特别关注高考新试卷结构
知识点命题特点、知识点之间的联系
题干特点、选项特点
设问特点、答题特点
... ..



抓住阅卷人眼睛

1. 数学符号答题。
2. 逻辑清晰，必要的文字说明，条件完整。
3. 字迹清晰整齐，书写规范，注意错别字。

01 第一部分 高考专题讲练

• 思想篇	数学思想方法的应用	001
• 方法篇	选填题的特殊解法	005

高考六大模块题型解法攻略

模块一 三角函数、平面向量与解三角形

微专题 1	三角函数的图象与性质、三角恒等变换	008
高考进阶 1	三角函数与函数、导数交汇问题	010
	交汇一 三角函数与基本函数	交汇二 三角函数与导数
微专题 2	平面向量	011
微专题 3	解三角形	012
高分提能一	多三角形问题	015
	类型一 三角形中线	类型二 三角形角平分线
	类型三 四边形问题	

模块二 数列

微专题 4	等差数列、等比数列	017
微专题 5	递推数列与数列求和	019
微专题 6	数列与其他知识的交汇问题	022
高分提能二	数列新定义创新问题	024
	创新一 新定义数列问题	创新二 二元递推数列
	创新三 数列与导数综合	

模块三 立体几何

微专题 7	空间几何体	027
-------	-------------	-----

微专题 8	几何体的切接问题与嵌套问题	029
微专题 9	空间角与空间距离问题	031
微专题 10	立体几何中的截面与动态问题	035

模块四 统计与概率

微专题 11	计数原理与排列组合、二项式定理	037
微专题 12	统计与成对数据的统计分析	039
微专题 13	概率及性质、条件概率	043
微专题 14	随机变量的分布列与数学期望	045

高分提能三 概率、变量分布与其他知识的综合问题

综合一	与数列结合的概率问题	综合二	与函数相关的概率问题
综合三	新定义综合问题		

模块五 解析几何

微专题 15	直线与圆	053
--------	------------	-----

高考进阶 2 名圆、隐圆问题

类型一	阿波罗尼斯圆	类型二	蒙日圆
类型三	隐圆		

微专题 16	圆锥曲线的定义与性质	056
--------	------------------	-----

高考进阶 3 圆锥曲线的光学性质问题

微专题 17	圆锥曲线热点问题（一）求值计算类	061
--------	------------------------	-----

高考进阶 4 利用平面几何知识转化简化运算

高考进阶 5 利用隐藏的定点定值解决问题

微专题 18	圆锥曲线热点问题（二）位置关系类	069
--------	------------------------	-----

高分提能四 圆锥曲线中非对称韦达定理的解题技巧

高分提能五 圆锥曲线与其他知识的综合问题

综合一	圆锥曲线与数列	综合二	圆锥曲线与函数导数
综合三	圆锥曲线新定义		

模块六 函数、导数与不等式

微专题 19	函数图象与性质的应用	076
高考进阶 6	抽象函数	078
微专题 20	基本初等函数与函数模型	079
微专题 21	不等式	081
微专题 22	利用导数研究函数性质	082
高考进阶 7	双(多)参量问题的处理技巧	084
微专题 23	零点问题	085
高分提能六	隐零点问题的处理技巧	088
	技巧一 虚设零点	技巧二 整体代换
微专题 24	恒成立与能成立问题	089
高分提能七	必要性探路——端点效应	091
微专题 25	不等式的证明	092
高分提能八	极值点偏移与零点偏移	094
微专题 26	切线放缩与构造	095
附录 1	高中数学考前必记公式	097
附录 2	关注教材中的素材挖掘拓展	101
参考答案	(另附分册)	104

02 第二部分 特色专项 (另附分册)

■ 考卷 I 小题·标准练

“8+3+3” 73分练 (小题1~小题12)

■ 考卷 II 解答·标准练

“15~17题” 43分练 (解答1~解答12)

“18题、19题” 34分练 (解答13~解答16)



最直接的
训练方式
往往最有效

思想一 函数与方程思想

思想概述:函数的思想,是用运动和变化的观点,分析和研究数学中的数量关系,是对函数概念的本质认识,建立函数关系或构造函数,运用函数的图象和性质去分析问题、转化问题,从而使问题获得解决.如求数列中的项或最值、求解三角形最值(范围)问题、求不等式中的参数、求解析几何中距离或面积的最值等相关的非函数问题,往往都可利用函数思想转化为函数问题.

方程的思想,就是分析数学问题中变量间的等量关系,建立方程或方程组,或者构造方程,通过解方程或方程组,或者运用方程的性质去分析问题、转化和解决问题.如变量的取值范围、直线与圆锥曲线的位置关系、数列中的基本量、二项式系数等问题.

真题示例

1. [2024·新课标I卷] 已知向量 $\mathbf{a} = (0, 1)$, $\mathbf{b} = (2, x)$, 若 $\mathbf{b} \perp (\mathbf{b} - 4\mathbf{a})$, 则 $x =$ ()
A. -2 B. -1 C. 1 D. 2

[解法关键]

根据向量垂直, 得 $\mathbf{b} \cdot (\mathbf{b} - 4\mathbf{a}) = 0$, 建立关于 x 的方程. 答案为 D.

2. [2023·新课标II卷] 记 S_n 为等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 若 $S_4 = -5$, $S_6 = 21S_2$, 则 $S_8 =$ ()
A. 120 B. 85
C. -85 D. -120

[解法关键]

设等比数列 $\{a_n\}$ 的公比为 q , 构建关于 q 和首项 a_1 的方程组, 求出 q 和 a_1 后再求 S_8 . 答案为 C.

3. [2022·新高考全国I卷] 已知正四棱锥的侧棱长为 l , 其各顶点都在同一球面上, 若该球的体积为 36π , 且 $3 \leq l \leq 3\sqrt{3}$, 则该正四棱锥体积的取值范围是 ()

- A. $\left[18, \frac{81}{4}\right]$ B. $\left[\frac{27}{4}, \frac{81}{4}\right]$
C. $\left[\frac{27}{4}, \frac{64}{3}\right]$ D. $[18, 27]$

[解法关键]

画出图形, 由题意可求出球的半径 $R = 3$, 设正四棱锥的底面边长为 a , 高为 h , 由勾股定理知 l 与 h 的关系, 由 l 的取值范围求出 h 的取值范围, 又因为 $a^2 =$

$$12h - 2h^2, \text{ 所以正四棱锥的体积 } V(h) = -\frac{2}{3}h^3 + 4h^2,$$

利用导数即可求出 $V(h)$ 的取值范围. 答案为 C.

自测题

1. [2024·江苏泰州四调] 在平行四边形 $ABCD$ 中, $A = 45^\circ$, $AB = 1$, $AD = \sqrt{2}$, 若 $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD}$ ($x \in \mathbf{R}$), 则 $|\overrightarrow{AP}|$ 的最小值为 ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
C. 1 D. $\sqrt{2}$

2. 已知双曲线 $C: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的左、右焦点分别为 $F_1(-1, 0)$, $F_2(1, 0)$, 过 F_1 的直线与 C 的左支交于 A, B 两点. 若 $|AF_1| = 2|F_1B|$, $|AB| = |BF_2|$, 则 C 的离心率为 ()
A. $\frac{\sqrt{30}}{5}$ B. $\frac{\sqrt{21}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{13}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{15}}{3}$

3. [2024·泰安三模] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $\frac{b \sin B}{\sin A} - a = \frac{(c-a) \sin C}{\sin A}$, 延长 BC 至点 D , 使得 $BC = CD$, 若 $AD = 2\sqrt{3}$, $AB = 2$, 则 $a =$ ()
A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 3

4. 已知实数 a, b, c 构成公差为 d 的等差数列, 若 $abc = 2, b < 0$, 则 d 的取值范围为_____.

思想二 数形结合思想

数形结合是根据数量与图形之间的对应关系,通过数与形的相互转化来解决数学问题的一种重要思想方法.数形结合思想体现了数与形之间的转化,它包含“以形助数”和“以数解形”两个方面.数形结合的实质是把抽象的数学语言与直观的图形语言结合起来,即将代数问题几何化、几何问题代数化.

数形结合思想常用来解决函数零点、方程根与不等式问题,参数范围问题,以立体几何为模型的代数问题,解析几何中的斜率、截距、距离等问题.

真题示例

1. [2024·新课标I卷] 当 $x \in [0, 2\pi]$ 时, 曲线 $y = \sin x$ 与 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 的交点个数为 ()
- A. 3 B. 4
- C. 6 D. 8

【解法关键】

画出函数 $y = \sin x$ 和函数 $y = 2\sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$ 在 $[0, 2\pi]$ 上的图象, 由图可知, 两函数图象有 6 个交点. 答案为 C.

2. [2023·全国甲卷] 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 满足 $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}| = 1, |\mathbf{c}| = \sqrt{2}$, 且 $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$, 则 $\cos\langle \mathbf{a} - \mathbf{c}, \mathbf{b} - \mathbf{c} \rangle =$ ()
- A. $-\frac{4}{5}$ B. $-\frac{2}{5}$
- C. $\frac{2}{5}$ D. $\frac{4}{5}$

【解法关键】

作向量 $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}, \overrightarrow{OB} = \mathbf{b}, \overrightarrow{OC} = \mathbf{c}$, 根据各向量之间的关系结合图形分析. 答案为 D.

3. [2024·天津卷] 在边长为 1 的正方形 $ABCD$ 中, 点 E 为线段 CD 的三等分点, 满足 $CE = \frac{1}{2}DE, \overrightarrow{BE} = \lambda \overrightarrow{BA} + \mu \overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda + \mu =$ _____, 若 F 为线段 BE 上的动点, G 为 AF 的中点, 则 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}$ 的最小值为 _____.

【解法关键】

方法一: 以 $\{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}\}$ 为基底, 根据向量的线性运算求 $\overrightarrow{BE}$, 即可得 $\lambda + \mu$ 的值, 设 $\overrightarrow{BF} = k\overrightarrow{BE}$, 求 $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DG}$, 结合数量积的运算律求 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}$ 的最小值; 方法二: 建立平面直角坐标系, 根据向量的坐标运算求 $\overrightarrow{BE}$, 即

可得 $\lambda + \mu$ 的值, 设 $F(a, -3a), a \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$, 求 $\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{DG}$, 结合数量积的坐标运算求 $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{DG}$ 的最小值. 答案为 $\frac{4}{3}, -\frac{5}{18}$.

自测题

1. (多选题) 已知不同的平面 α, β, γ 满足 $\alpha \perp \gamma, \beta \perp \gamma$, 不同的直线 a, b, c 满足 $a \perp \alpha, b \perp \beta, c \perp \gamma$, 则下列结论正确的有 ()
- A. $\alpha // \beta$ B. $a // b$
- C. $a \perp c$ D. $b \perp c$
2. 在矩形 $ABCD$ 中, $AB = 5, AD = 4$, 点 E 满足 $2\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{EB}$, 在平面 $ABCD$ 中, 动点 P 满足 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$, 则 $\overrightarrow{DP} \cdot \overrightarrow{AC}$ 的最大值为 ()
- A. $\sqrt{41} + 4$ B. $\sqrt{41} - 6$
- C. $2\sqrt{13} + 4$ D. $2\sqrt{13} - 6$
3. [2020·全国新高考I卷] 若定义在 $\mathbf{R}$ 的奇函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, 0)$ 单调递减, 且 $f(2) = 0$, 则满足 $xf(x-1) \geq 0$ 的 x 的取值范围是 ()
- A. $[-1, 1] \cup [3, +\infty)$
- B. $[-3, -1] \cup [0, 1]$
- C. $[-1, 0] \cup [1, +\infty)$
- D. $[-1, 0] \cup [1, 3]$
4. [2024·永州二模] 已知函数 $f(x) = \sqrt{|x|} + \sqrt{|x+a|} (a > 0)$, 下列结论正确的是 ()
- A. $f(x)$ 的图象是中心对称图形
- B. $f(x)$ 在区间 $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$ 上单调递增
- C. 若方程 $f(x) = b$ 有三个解, $f(b) = b$, 则 $a + b = 142$
- D. 若方程 $f(x) = 2$ 有四个解, 则 $a \in (2, 4)$

思想三 分类讨论思想

分类讨论思想就是将一个复杂的数学问题分解成若干个简单的基础问题,通过对基础问题的解答解决原问题的思维策略,实质上就是“化整为零,各个击破,再积零为整”的策略.其研究的基本方向是“分”,但分类解决问题之后,还必须把它们整合在一起.使用分类讨论思想应明白这样几点:一是引起分类讨论的原因;二是分类讨论的原则,不重不漏,分类标准统一;三是明确分类讨论的步骤.

常见的分类讨论问题有以下几种:(1)由概念引起的分类讨论;(2)由性质、定理、公式的限制条件引起的分类讨论;(3)由数学运算引起的分类讨论;(4)图形的不确定性引起的分类讨论;(5)由参数的变化引起的分类讨论.

真题示例

1. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x) = (x+a)\ln(x+b)$, 若 $f(x) \geq 0$, 则 $a^2 + b^2$ 的最小值为 ()

A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 1

【解法关键】

方法一:由题意可知, $f(x)$ 的定义域为 $(-b, +\infty)$,分类讨论 $-a$ 与 $-b, 1-b$ 的大小关系,结合符号分析判断,即可得 $b=a+1$,代入可得最值;方法二:根据对数函数的性质分析 $\ln(x+b)$ 的符号,通过分类讨论进而可得 $x+a$ 的符号,即可得 $b=a+1$,代入可得最值.答案为C.

2. [2024·全国甲卷] 有6个相同的球,分别标有数字1,2,3,4,5,6,从中无放回地随机取3次,每次取1个球.设 m 为前两次取出的球上数字的平均值, n 为取出的三个球上数字的平均值,则 m 与 n 之差的绝对值不大于 $\frac{1}{2}$ 的概率为 _____.

【解法关键】

根据排列可求基本事件的总数,设前两个球的号码为 a, b ,第三个球的号码为 c ,则 $a+b-3 \leq 2c \leq a+b+3$,就 c 的不同取值分类讨论后可求随机事件的概率.答案为 $\frac{7}{15}$.

3. [2022·天津卷] 设 $a \in \mathbf{R}$,对于任意实数 x ,记 $f(x) = \min\{|x| - 2, x^2 - ax + 3a - 5\}$,若 $f(x)$ 至少有3个零点,则实数 a 的取值范围为 _____.

【解法关键】

令 $g(x) = x^2 - ax + 3a - 5$,利用判别式 $\Delta = a^2 - 12a + 20$ 的符号确定 a 的取值或取值范围,再对 a 进行讨论,并借助函数图象得出结论.答案为 $a \geq 10$.

自测题

1. 已知 $a \in \mathbf{R}$,则“ $0 < a < 1$ ”是“函数 $f(x) = (1-a)x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增”的 ()
- A. 充分不必要条件
B. 必要不充分条件
C. 充要条件
D. 既不充分也不必要条件
2. 某校高一、高二、高三年级的优秀团员各两名站成一排拍照,恰有一个年级的团员相邻的站法有 ()
- A. 144种 B. 240种
C. 288种 D. 336种
3. (多选题)无穷等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 a_1 ,公比为 q ,下列条件能使 $\{a_n\}$ 既有最大值,又有最小值的有 ()
- A. $a_1 > 0, 0 < q < 1$
B. $a_1 > 0, -1 < q < 0$
C. $a_1 < 0, q = -1$
D. $a_1 < 0, q < -1$
4. 已知二面角 $\alpha-l-\beta$ 为 60° , α 内一条直线 m 与 l 所成角为 30° , β 内一条直线 n 与 l 所成角为 45° ,则直线 m 与直线 n 所成角的余弦值是 _____.

思想四 转化与化归思想

转化与化归思想是指在研究解决数学问题时,采用某种手段将问题转化,使问题得以解决的一种思维策略,其核心是把复杂的问题化归为容易求解的问题,将较难的问题化归为较简单的问题,将未能解决的问题化归为已经解决的问题,简单说就是化“生”为“熟”.

常见的转化与化归思想的应用具体表现在:将抽象函数问题转化为具体函数问题,立体几何和解析几何中一般性点或图形问题转化为特殊点或特殊图形,“至少”或“是否存在”等正向思维受阻问题转化为逆向思维,空间与平面的转化,相等问题与不等问题的转化等.

真题示例

1. [2024·新课标Ⅱ卷] 设函数 $f(x)=a(x+1)^2-1$, $g(x)=\cos x+2ax$ (a 为常数), 当 $x \in (-1,1)$ 时, 曲线 $y=f(x)$ 与 $y=g(x)$ 恰有一个交点, 则 $a=$ ()

- A. -1 B. $\frac{1}{2}$
C. 1 D. 2

[解法关键]

令 $h(x)=f(x)-g(x)$, $x \in (-1,1)$, 原问题等价转化为 $h(x)$ 有且仅有一个零点, 可知 $h(x)$ 为偶函数, 根据偶函数图象的对称性可知 $h(x)$ 的零点只能为 0, 即可得 $a=2$, 并代入检验即可. 答案为 D.

2. [2023·全国乙卷] 已知实数 x, y 满足 $x^2+y^2-4x-2y-4=0$, 则 $x-y$ 的最大值是 ()

- A. $1+\frac{3\sqrt{2}}{2}$ B. 4
C. $1+3\sqrt{2}$ D. 7

[解法关键]

本题转化与化归方向有三种: 一是设 $x-y=k$, 则 $x=k+y$, 代入原方程化简得 $2y^2+(2k-6)y+k^2-4k-4=0$, 即转化为此方程有解的问题, 利用判别式求解即可; 二是令 $x=3\cos \theta+2$, $y=3\sin \theta+1$, 其中 $\theta \in [0, 2\pi]$, 用参数 θ 表示 x, y , 则 $x-y=3\cos \theta-3\sin \theta+$

$1=3\sqrt{2}\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+1$, 这样 $x-y$ 的最大值问题就

转化为与参数 θ 有关的三角函数的最值问题; 三是设 $x-y=k$, 把此方程看成直线方程, 利用圆心到直线的距离公式求最值. 答案为 C.

自测题

1. [2024·唐山一模] 已知函数 $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x-2}}$, 则

$f(x)$ 的最小值为 ()

- A. 0 B. 2
C. $2\sqrt{2}$ D. 3

2. [2024·安徽合肥一中模拟] 已知圆 $C:(x-6)^2+(y-8)^2=1$ 和两点 $A(-m,0), B(m,0)$ ($m>0$), 若圆 C 上至少存在一点 P , 使得 $\angle APB>90^\circ$, 则实数 m 的取值范围是 ()

- A. (9,11)
B. (9, $+\infty$)
C. [9, $+\infty$)
D. (11, $+\infty$)

3. 设 z_1, z_2 是非零复数, $|z_2+i|+|z_2-i|=4$, 则 $|z_2|$ 的最小值为_____.

4. [2021·新高考全国Ⅰ卷] 函数 $f(x)=|2x-1|-2\ln x$ 的最小值为_____.

方法一 特例法

在解决选择题和填空题时,可以取一个(或一些)特殊数值(或特殊位置、特殊函数、特殊点、特殊方程、特殊数列、特殊图形等)来确定其结果,这种方法称为特值法.特值法只需对特殊数值、特殊情形进行检验,省去了推理论证、繁琐演算的过程,提高了解题的速度.特例法是考试中解答选择题和填空题时经常用到的一种方法,应用得当可以起到“四两拨千斤”的功效.

(1)使用前提:满足当一般性结论成立时,对符合条件的特殊化情况也一定成立.

(2)使用技巧:找到满足条件的合适的特殊化例子,或举反例排除,有时甚至需要两次或两次以上特殊化例子才可以确定结论.

(3)常见问题:求范围、比较大小、含字母求值、恒成立问题、任意性问题等.

真题示例

1. [2024·全国甲卷] 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ,若 $S_9=1$,则 $a_3+a_7=$ ()

A. -2 B. $\frac{7}{3}$ C. 1 D. $\frac{2}{9}$

[解法关键]

不妨取等差数列的公差 $d=0$,则 $S_9=1=9a_1$,可得 $a_1=\frac{1}{9}$,则 $a_3+a_7=2a_1=\frac{2}{9}$.答案为D.

2. [2024·新课标II卷] 已知曲线 $C:x^2+y^2=16$ ($y>0$),从 C 上任意一点 P 向 x 轴作垂线 PP' , P' 为垂足,则线段 PP' 的中点 M 的轨迹方程为 ()

A. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1(y>0)$ B. $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{8}=1(y>0)$
C. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{4}=1(y>0)$ D. $\frac{y^2}{16}+\frac{x^2}{8}=1(y>0)$

[解法关键]

在曲线 C 上取一点 $(0,4)$,向 x 轴作垂线,中点坐标为 $(0,2)$,代入A,B,C,D四个选项,只有A符合.答案为A.

3. [2024·新课标I卷] 已知函数 $f(x)=\begin{cases} -x^2-2ax-a, & x<0, \\ e^x+\ln(x+1), & x\geq 0 \end{cases}$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,则 a 的取值范围是 ()

A. $(-\infty,0]$ B. $[-1,0]$
C. $[-1,1]$ D. $[0,+\infty)$

[解法关键]

因为 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上单调递增,且当 $x\geq 0$ 时, $y=e^x+\ln(x+1)$ 单调递增,所以主要考查当 $x<0$ 时, $y=-x^2-2ax-a$ 的单调性.观察选项,当 $a=\frac{1}{2}$ 时,函数 $y=-x^2-x-\frac{1}{2}$ 的图象的对称轴直线为 $x=-\frac{1}{2}$,在 $\mathbf{R}$ 上不单调递增,排除C,D;当 $a=-2$ 时,函数 $y=-x^2+4x+2$ 的图象的对称轴为直线 $x=2$,但 $f(0)=1<2$, $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上不单调递增,排除A.答案为B.

自测题

1. 已知 O 是坐标原点, P,Q 是椭圆 $3x^2+5y^2=1$ 上满足 $\angle POQ=90^\circ$ 的两个动点,则 $\frac{1}{|OP|^2}+\frac{1}{|OQ|^2}=$ ()
A. 34 B. 8 C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{34}{225}$
2. (多选题)[2022·新高考全国II卷] 若实数 x,y 满足 $x^2+y^2-xy=1$,则 ()
A. $x+y<1$ B. $x+y\geq -2$
C. $x^2+y^2\geq 1$ D. $x^2+y^2\leq 2$
3. 在数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$,对于任意正整数 m,n ,都满足 $a_{m+n}=a_m+a_n+mn$,则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\dots+\frac{1}{a_{2025}}=$ _____.

方法二 验证法

验证法是将选项或特殊值代入题干逐一去验证是否满足题目条件,然后选择符合题目条件的选项的一种方法.在运用验证法解题时,若能根据题意确定代入顺序,则能提高解题速度.

(1)使用前提:各选项可分别作为条件.

(2)使用技巧:可以结合特值法、排除法等先否定一些明显错误的选项,再选择直觉认为最有可能的选项进行验证,这样可以快速获得答案.

(3)常见问题:题干信息不全、选项是数值或范围、正面求解或计算繁琐的问题等.

真题示例

1. [2024·上海卷] 下列函数 $f(x)$ 的最小正周期是 2π 的是 ()

A. $\sin x + \cos x$ B. $\sin x \cos x$
C. $\sin^2 x + \cos^2 x$ D. $\sin^2 x - \cos^2 x$

[解法关键]

根据辅助角公式、二倍角公式以及同角三角函数关系并结合三角函数的性质对各选项逐一验证,可知选项 B、D 的最小正周期为 π ,选项 C 是常值函数,只有选项 A 的最小正周期为 2π . 答案为 A.

2. [2023·新课标Ⅱ卷] 已知函数 $f(x) = ae^x - \ln x$ 在区间 $(1, 2)$ 单调递增,则 a 的最小值为 ()

A. e^2 B. e
C. e^{-1} D. e^{-2}

[解法关键]

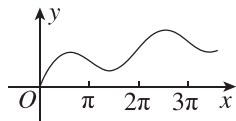
由题可知 $f'(x) = ae^x - \frac{1}{x}$, 当 $a = e^2, e, e^{-1}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上恒成立, 当 $a = e^{-2}$ 时, $f'(x) \geq 0$ 在 $(1, 2)$ 上不恒成立. 答案为 C.

自测题

1. 在数列 $\{a_n\}$ 中,若 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \sqrt{2}$, $a_1 = 8$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

A. $a_n = 2(n+1)^2$ B. $a_n = 4(n+1)$
C. $a_n = 8n^2$ D. $a_n = 4n(n+1)$

2. 若函数 $y = f(x)$ 在第一象限内的图象如图所示, 则其解析式可能是 ()



A. $f(x) = \frac{1}{2}x + \sin x$

B. $f(x) = \sqrt{x} + \sin x$

C. $f(x) = \sqrt{x} + \cos x - 1$

D. $f(x) = x + \cos x - 1$

3. [2024·青岛三模] 已知函数 $f(x) = (x^2 - 2x) \cdot (e^{x-1} + e^{1-x})$, 则满足不等式 $f(2x) < f(4)$ 的 x 的取值范围为 ()

A. $(-\infty, 2)$ B. $(-1, 2)$
C. $(2, +\infty)$ D. $(1, 2)$

4. (多选题) [2024·浙江天城协作体二模] 已知正实数 a, b, c , 且 $a > b > c$, x, y, z 为自然数, 则满足 $\frac{x}{a-b} + \frac{y}{b-c} + \frac{z}{c-a} > 0$ 恒成立的 x, y, z 可以是 ()

A. $x=1, y=1, z=4$
B. $x=1, y=2, z=5$
C. $x=2, y=2, z=7$
D. $x=1, y=3, z=9$

方法三 构造法

构造法是一种创造性的解题方法,它很好地体现了数学中的发散、类比、转化思想,是指根据题设条件和结论的特征、性质,运用已知数学关系式和理论,构造出满足条件或结论的数学对象,从而使原问题中隐含的关系和性质在新构造的数学对象中清晰地展现出来,并借助该数学对象方便快捷地解决数学问题的方法.构造法应用的技巧是“定目标构造”,需从已知条件入手,紧扣要解决的问题,把陌生的问题转化为熟悉的问题,解题时常构造函数、方程、几何图形等.

(1)使用前提:所构造的函数、方程、几何图形等要合理,不能超出原题的限制条件.

(2)使用技巧:对于不等式、方程、函数问题常采用构造新函数,对于不规则的几何体常构造成规则几何体处理.

(3)常见问题:比较大小、函数导数问题、不规则的几何体问题等.

真题示例

1. [2022·新高考全国I卷] 设 $a=0.1e^{0.1}$, $b=\frac{1}{9}$, $c=-\ln 0.9$, 则 ()
- A. $a < b < c$ B. $c < b < a$
C. $c < a < b$ D. $a < c < b$

【解法关键】

当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$ 时, $\ln(1+x) < x$ 恒成立. 构造函数 $g(x) = xe^x + \ln(1-x)$ ($0 < x \leq 0.1$), 利用函数的单调性可得结果. 答案为 C.

2. [2024·天津卷] 一个五面体 $ABC-DEF$ 如图所示, 已知 $AD \parallel BE \parallel CF$, 且两两之间的距离为 1, 并已知 $AD=1$, $BE=2$, $CF=3$, 则该五面体的体积为 ()
- A. $\frac{\sqrt{3}}{6}$ B. $\frac{3\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{2}$

【解法关键】

采用补形法将五面体 $ABC-DEF$ 补成一个棱柱, 再利用体积公式求解即可. 答案为 C.

3. [2024·全国甲卷] 曲线 $y=x^3-3x$ 与 $y=-(x-1)^2+a$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个不同的交点, 则 a 的取值范围为_____.

【解法关键】

令 $x^3-3x=-(x-1)^2+a$, 分离参数 a , 构造新函数 $g(x)=x^3+x^2-5x+1$ ($x>0$), 结合导数求得 $g(x)$ 的单调区间, 画出 $g(x)$ 的大致图象, 数形结合即可求解. 答案为 $(-2, 1)$.

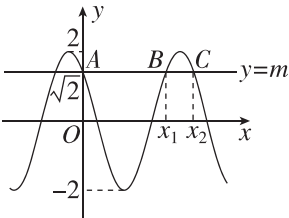
自测题

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且满足 $a_1=2$, $\frac{S_{n+1}}{n+1} - \frac{S_n}{n} = 2$, 则 $S_{10} =$ ()
- A. 110 B. 200
C. 65 D. 155
2. [2024·重庆南开中学月考(八)] 在四面体 $ABCD$ 中, $AB=CD=AC=BD=2$, $AD=BC$, 若四面体 $ABCD$ 的外接球的表面积为 7π , 则四面体 $ABCD$ 的体积为 ()
- A. 1 B. 2
C. $\frac{4}{3}$ D. $\frac{8}{3}$
3. (多选题) 已知 $a \neq b$, 且 a, b 满足 $\sqrt{a^2+1} - a < \sqrt{b^2+1} + b$, 则下列不等式恒成立的是 ()
- A. $e^{a-b} > 1$
B. $a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 > 0$
C. $5^a - 5^{-b} > 3^{-a} - 3^b$
D. $e^a + b > 1$
4. (多选题) 已知函数 $f(x)$ 的导函数为 $f'(x)$, 若 $f(x) < xf'(x) < 2f(x) - x$ 对 $x \in (0, +\infty)$ 恒成立, 则下列不等式一定成立的是 ()
- A. $f(1) > \frac{f(2)}{2}$
B. $f(1) < \frac{f(2)}{2}$
C. $f(1) < \frac{f(2)}{4} + \frac{1}{2}$
D. $\frac{f(2)}{4} + \frac{1}{2} < f(1)$

微专题 1 三角函数的图象与性质、三角恒等变换

考法探析 · 明规律

微点 1 由解析式、图象探性质

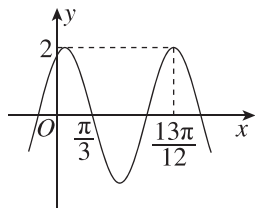
例 1 (1) A, B, C 是直线 $y=m$ 与函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, 0 < \varphi < \pi$) 的图象的三个交点, 如图所示, 其中点 $A(0, \sqrt{2})$, B, C 两点的横坐标分别为 x_1, x_2 , 若 $x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4}$, 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$ ()A. $-\sqrt{2}$ B. -1 C. $\sqrt{2}$ D. 2 (2) (多选题) [2022 · 新高考全国 II 卷] 已知函数 $f(x) = \sin(2x + \varphi)$ ($0 < \varphi < \pi$) 的图像关于点 $(\frac{2\pi}{3}, 0)$ 对称, 则 ()A. $f(x)$ 在 $(0, \frac{5\pi}{12})$ 上单调递减B. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12})$ 上有两个极值点C. 直线 $x = \frac{7\pi}{6}$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条对称轴D. 直线 $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - x$ 是曲线 $y = f(x)$ 的一条切线

[听课笔记]

[规律提炼]

整体思想解决三角函数性质问题: 将 $\omega x + \varphi$ 看成一个整体, 根据 x 的范围得到 $\omega x + \varphi$ 的范围, 结合正、余弦函数的值域、单调性、奇偶性、图象的称性等性质可以得到正、余弦型函数的性质.

自测题

1. (多选题) [2024 · 岳阳三检] 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0, |\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的部分图象如图所示, 则 ()A. $\omega = 2$ B. $f(x)$ 的单调递减区间为 $(k\pi + \frac{\pi}{12}, k\pi + \frac{7\pi}{12})$, $k \in \mathbb{Z}$ C. $f(x)$ 的图象可由函数 $y = 2\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位得到D. 满足 $[f(x) - f(-\frac{7\pi}{4})][f(x) - f(\frac{4\pi}{3})] > 0$ 的最小正整数为 22. 已知函数 $f(x) = \sin \omega x - 2\cos \omega x$ ($\omega > 0$), 且 $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$. 若两个不等的实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1)f(x_2) = 5$ 且 $|x_1 - x_2|_{\min} = \pi$, 则 $\sin 4\alpha =$ _____.

微点 2 已知性质求参数的范围

例 2 (多选题) [2024 · 河南焦作二模] 已知函数 $f(x) = 2\sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$), $f'(x)$ 为 $f(x)$ 的导函数, 则下列结论中正确的是 ()A. 函数 $g(x) = f(x) + f'(x)$ 的图象不可能关于 y 轴对称B. 若 $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ 且 $\omega \in \mathbb{Z}$, $f(x)$ 在 $[0, \frac{4\pi}{3}]$ 上恰有 4 个零点, 则 $\omega = 3$ C. 若 $\varphi = \frac{\pi}{3}$, $f(3\pi - x) + f(x) = 0$, 则 ω 的最小值为 $\frac{4}{9}$ D. 若 $\omega = \frac{10}{9}$, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, 且 $f(x)$ 在 $[-\frac{9\pi}{20}, m]$ 上的取值范围为 $[-1, 2]$, 则 m 的取值范围是 $[\frac{3\pi}{20}, \frac{9\pi}{20}]$

[听课笔记]

自测题

1. 已知函数 $f(x) = 2\cos(\omega x + \frac{\pi}{6})$ ($\omega > 0$) 在 $(0, \pi)$

上有且仅有 2 个极值点,且在 $(\frac{\pi}{3}, \frac{11\pi}{24})$ 上单调递增,则 ω 的取值范围为 ()

- A. $[\frac{5}{2}, \frac{17}{6}]$ B. $[\frac{5}{2}, 4]$
C. $[2, \frac{17}{6}]$ D. $[2, \frac{8}{3}]$

2. [2024 · 安徽马鞍山二中二模] 已知函数

$f(x) = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$ 的定义域为 $[a, b]$, 值域为 $[-1, 2]$, 则 $b - a$ 的取值范围为_____.

微点 3 三角恒等变换

例 3 (1) [2022 · 新高考全国 II 卷] 若 $\sin(\alpha + \beta) +$

$\cos(\alpha + \beta) = 2\sqrt{2} \cos(\alpha + \frac{\pi}{4}) \sin \beta$, 则 ()

- A. $\tan(\alpha + \beta) = -1$
B. $\tan(\alpha + \beta) = 1$
C. $\tan(\alpha - \beta) = -1$
D. $\tan(\alpha - \beta) = 1$

(2) 已知 $\sin(130^\circ + \alpha) = 2\cos 20^\circ \cos \alpha$, 则 $\tan(\alpha + 45^\circ) =$ ()

- A. $-2 + \sqrt{3}$ B. $2 - \sqrt{3}$
C. $2 + \sqrt{3}$ D. $-2 - \sqrt{3}$

[听课笔记]

【规律提炼】

- 三角化简问题总的方向是变角与变式,达到“角、名和次”以及结构的统一;
- 常见技巧涉及换元法、切化弦、整体代换等方法;
- 求角问题要考虑对应三角函数值与特殊角之间的关系,考虑是单一值或者多个值.

自测题

1. [2024 · 江西宜春二模] 已知 $\alpha \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4})$,

$\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha) = \frac{1}{2} \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$, 则 $\frac{1 - \sin 2\alpha}{4\cos^2 \alpha} =$ ()

- A. $6 + 4\sqrt{2}$ B. $6 - 4\sqrt{2}$
C. $17 + 12\sqrt{2}$ D. $17 - 12\sqrt{2}$

2. 若 $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\beta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ 且 $\cos(\alpha + \beta) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$,

$\tan \alpha = 3 - 2\sqrt{2}$, 则 $2\alpha + \beta$ 的值为_____.

真题巧用 · 定方向

1. [2023 · 新课标 II 卷] 已知 α 为锐角, $\cos \alpha =$

$\frac{1 + \sqrt{5}}{4}$, 则 $\sin \frac{\alpha}{2} =$ ()

- A. $\frac{3 - \sqrt{5}}{8}$ B. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{8}$
C. $\frac{3 - \sqrt{5}}{4}$ D. $\frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$

2. [2023 · 新课标 I 卷] 已知 $\sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{3}$,

$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{6}$, 则 $\cos(2\alpha + 2\beta) =$ ()

- A. $\frac{7}{9}$ B. $\frac{1}{9}$ C. $-\frac{1}{9}$ D. $-\frac{7}{9}$

3. [2022 · 新高考全国 I 卷] 记函数 $f(x) =$

$\sin(\omega x + \frac{\pi}{4}) + b$ ($\omega > 0$) 的最小正周期为 T , 若

$\frac{2\pi}{3} < T < \pi$, 且 $y = f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{3\pi}{2}, 2)$ 中

心对称, 则 $f(\frac{\pi}{2}) =$ ()

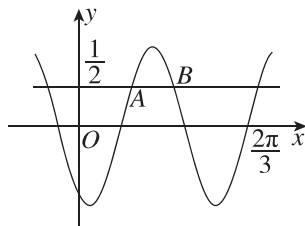
- A. 1 B. $\frac{3}{2}$
C. $\frac{5}{2}$ D. 3

4. (多选题) [2024 · 新课标Ⅱ卷] 对于函数 $f(x) = \sin 2x$ 和 $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$, 下列说法正确的有 ()

- A. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的零点
- B. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最大值
- C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的最小正周期
- D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图象有相同的对称轴

5. [2023 · 新课标Ⅰ卷] 已知函数 $f(x) = \cos \omega x - 1$ ($\omega > 0$) 在区间 $[0, 2\pi]$ 有且仅有 3 个零点, 则 ω 的取值范围是_____.

6. [2023 · 新课标Ⅱ卷] 已知函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$, 如图, A, B 是直线 $y = \frac{1}{2}$ 与曲线 $y = f(x)$ 的两个交点, 若 $|AB| = \frac{\pi}{6}$, 则 $f(\pi) =$ _____.



高考进阶1 三角函数与函数、导数交汇问题

交汇一 三角函数与基本函数

例1 (1) [2024 · 菏泽一模] 已知 $f(x) = \sin(\ln x)$, $x > 0$, 则“ $x = e^{n\pi} (n \in \mathbb{N}^*)$ ”是“ $f(x) = 0$ ”的 ()

- A. 充分不必要条件
- B. 必要不充分条件
- C. 充要条件
- D. 既不充分也不必要条件

(2) (多选题) 已知函数 $f(x) = e^{\cos x} - e^{\frac{1}{\cos 2x}}$, 则 ()

- A. 函数 $f(x)$ 是周期函数
- B. 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{4})$ 上单调递减
- C. 函数 $f(x)$ 的零点为 $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- D. 函数 $f(x)$ 的图象关于直线 $x = \pi$ 对称

自测题

(多选题) [2024 · 浙江北斗星盟联考] 已知函

数 $f(x) = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x}$, 则 ()

- A. $f(x)$ 的最小正周期为 π
- B. $f(x)$ 的图象关于点 $(\pi, 0)$ 对称
- C. $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ 上单调递减
- D. 当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时, $f(x) \geq 2\sqrt{2}$

交汇二 三角函数与导数

例2 [2024 · 武汉四月调考] 设 A, B, C 是一个三角形的三个内角, 则 $\cos A(3\sin B + 4\sin C)$ 的最小值为_____.

自测题

已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c . 若 $a^2 - b^2 = bc$, 则 $\frac{b}{a+c}$ 的取值范围是_____.

微专题2 平面向量

考法探析·明规律

微点1 平面向量基本定理与线性运算

例1 (1)[2024·浙江绍兴二模] 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形, E, F 分别是 BC, DC 上一点, 且 $\overrightarrow{EC}=2\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{DF}=2\overrightarrow{FC}$, 记 $\overrightarrow{AB}=\mathbf{a}, \overrightarrow{AD}=\mathbf{b}$, 则 $\overrightarrow{EF}=(\quad)$

- A. $-\frac{1}{3}\mathbf{a}+\frac{2}{3}\mathbf{b}$ B. $-\frac{1}{3}\mathbf{a}-\frac{2}{3}\mathbf{b}$
C. $\frac{2}{3}\mathbf{a}+\frac{1}{3}\mathbf{b}$ D. $\frac{2}{3}\mathbf{a}-\frac{1}{3}\mathbf{b}$

(2)(多选题)[2024·沈阳二模] $\triangle ABC$ 的重心为点 G , 点 O, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内两个不同的点, 满足 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$, 则 $(\quad)$

- A. O, P, G 三点共线
B. $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OG}$
C. $2\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$
D. 点 P 在 $\triangle ABC$ 的内部

[听课笔记]

自测题

[2024·吕梁三模] 已知等边 $\triangle ABC$ 的边长为1, 点 D, E 分别为 AB, BC 的中点, 若 $\overrightarrow{DF}=3\overrightarrow{EF}$, 则 $\overrightarrow{AF}=(\quad)$

- A. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{5}{6}\overrightarrow{AC}$ B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$ D. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

微点2 平面向量数量积

例2 (1)[2024·湖北武汉模拟] 已知向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 满足 $|\mathbf{a}|=2, (4\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{b}=4$, 则 $|2\mathbf{a}+\mathbf{b}|=(\quad)$

- A. $2\sqrt{5}$ B. $2\sqrt{3}$ C. 20 D. 5

(2)[2024·江苏南京模拟] 已知四边形 $ABCD$ 是边长为2的菱形, $\angle ABC=\frac{\pi}{3}$, P 为 BC 的中点, 则 $(\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB})\cdot\overrightarrow{PC}$ 的值为_____.

[听课笔记]

自测题

1. [2024·湖南湘潭质检] 已知圆 O 的半径为1, A, B, C 为圆 O 上三点, 满足 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{3}$, 则 $\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC})$ 的取值范围为 $(\quad)$
A. $[1, 2]$ B. $[1, 3]$
C. $[\frac{1}{2}, 2]$ D. $[\frac{1}{2}, 3]$
2. [2024·东北三省三校二联] 已知 $|\mathbf{a}|=5, \mathbf{b}=(-1, 2)$, $\mathbf{a}$ 在 $\mathbf{b}$ 上的投影向量的坐标为 $(-2, 4)$, 则向量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 夹角的余弦值为_____.

微点3 平面向量与其他知识的综合问题

例3 [2024·山东泰安二模] 已知在矩形 $ABCD$ 中, $AB=1, AD=\sqrt{3}$, 动点 P 在以点 C 为圆心且与 BD 相切的圆上, 则 $\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{AD}$ 的最大值为_____; 若 $\overrightarrow{AP}=m\overrightarrow{AB}+n\overrightarrow{AD}(m, n\in\mathbf{R})$, 则 $m+n$ 的最大值为_____.

[听课笔记]

自测题

1. [2024·苏州三模] 已知过抛物线 $C:y^2=4x$ 的焦点 F 的直线与 C 相交于 A, B 两点, y 轴上一点 P 满足 $PA\perp PF$, 若 O 为坐标原点, 则 $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=(\quad)$
A. 1 B. 2 C. -1 D. -2
2. (多选题)[2024·南京师大附中二模] 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , O 为 $\triangle ABC$ 的重心, $\cos A=\frac{1}{5}, AO=2$, 则 $(\quad)$
A. $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$
B. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\leq 3$
C. $\triangle ABC$ 的面积的最大值为 $3\sqrt{6}$
D. a 的最小值为 $2\sqrt{5}$

【规律提炼】

1. 解决向量问题的主要方法为基底法、坐标法、投影法；
2. 常规模长、夹角、数量积问题主要是探求公式中的相

关量问题；

3. 解决含参问题，除了建立方程组，还常借助向量的几何性质或结合图象处理.

真题巧用 · 定方向

1. [2022 · 新高考全国I卷] 在 $\triangle ABC$ 中，点 D 在边 AB 上， $BD=2DA$. 记 $\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{m}$, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{n}$, 则 $\overrightarrow{CB}=\quad\quad\quad$ ()
A. $3\boldsymbol{m}-2\boldsymbol{n}$ B. $-2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$
C. $3\boldsymbol{m}+2\boldsymbol{n}$ D. $2\boldsymbol{m}+3\boldsymbol{n}$
2. [2022 · 新高考全国II卷] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(3,4)$, $\boldsymbol{b}=(1,0)$, $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+t\boldsymbol{b}$, 若 $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$, 则实数 $t=\quad\quad\quad$ ()
A. -6 B. -5 C. 5 D. 6
3. [2024 · 新课标II卷] 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}|=1$, $|\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}|=2$, 且 $(\boldsymbol{b}-2\boldsymbol{a})\perp\boldsymbol{b}$, 则 $|\boldsymbol{b}|=\quad\quad\quad$ ()
A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1
4. [2023 · 新课标I卷] 已知向量 $\boldsymbol{a}=(1,1)$, $\boldsymbol{b}=(1,-1)$. 若 $(\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b})\perp(\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})$, 则 $\quad\quad\quad$ ()
A. $\lambda+\mu=1$ B. $\lambda+\mu=-1$
C. $\lambda\mu=1$ D. $\lambda\mu=-1$
5. [2023 · 新课标II卷] 已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 满足 $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=\sqrt{3}$, $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|2\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$, 则 $|\boldsymbol{b}|=\quad\quad\quad$.
6. [2024 · 天津卷] 在边长为1的正方形 $ABCD$ 中，点 E 为线段 CD 的三等分点，满足 $CE=\frac{1}{2}DE$, $\overrightarrow{BE}=\lambda\overrightarrow{BA}+\mu\overrightarrow{BC}$, 则 $\lambda+\mu=\quad\quad\quad$, 若 F 为线段 BE 上的动点, G 为 AF 的中点, 则 $\overrightarrow{AF}\cdot\overrightarrow{DG}$ 的最小值为 $\quad\quad\quad$.

微专题3 解三角形

考法探析 · 明规律

微点1 边角混合式

例1 已知在 $\triangle ABC$ 中，内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 且 $a(\cos A + \cos B \cos C) = \sqrt{3}b \sin A \cos C$.

- (1)求角 C 的大小；
- (2)若 $a+b=2c$, $\triangle ABC$ 外接圆的直径为4, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

自测题

$\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $2\cos C(a\cos B + b\cos A) = c$.

- (1)求 C ；
- (2)若 $c=\sqrt{7}$, $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

微点2 最值范围问题

例2 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,且满足 $c=2(a-b)\cos B$.

(1)证明: $\frac{A}{B}=3$;

(2)若 A 为钝角,求 $\frac{a}{b}$ 的取值范围.

【规律提炼】

三角形中常见的求最值与范围问题,的解题策略

(1)利用余弦定理,找三角形三边之间的关系,利用基本不等式将 $a+b$ 与 ab 相互转化求最值范围.

(2)利用正弦定理,将边化成角的正弦,利用三角恒等变换进行化简;利用三角函数的性质求最值、范围.

自测题

[2024·鹰潭二模] $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c ,满足 $\frac{1-\sin A}{\cos A}=\frac{\sin B}{\cos B}$.

(1)求证: $A+2B=\frac{\pi}{2}$;

(2)求 $\frac{a^2+b^2}{c^2}$ 的最小值.

微点3 正余弦定理在平面几何中的应用

例3 已知四边形 $ABCD$ 的外接圆面积为 $\frac{7\pi}{3}$,且

$BD=\sqrt{7}, CD=2, \angle BAD$ 为钝角,

(1)求 $\angle BCD$ 和 BC ;

(2)若 $\sin \angle ABD=\frac{\sqrt{21}}{7}$,求四边形 $ABCD$ 的面积.

自测题

[2024·晋城一模] 在 $\triangle ABC$ 中, $AB=3\sqrt{3}$,
 $AC=5\sqrt{3}, BC=7\sqrt{3}$.

(1)求 A 的大小;

(2)求 $\triangle ABC$ 外接圆的半径与内切圆的半径.

1. [2024 · 全国甲卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $B=60^\circ, b^2=\frac{9}{4}ac$, 则 $\sin A + \sin C =$ ()

- A. $\frac{3}{2}$ B. $\sqrt{2}$ C. $\frac{\sqrt{7}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

2. [2022 · 全国甲卷] 已知 $\triangle ABC$ 中, 点 D 在边 BC 上, $\angle ADB = 120^\circ, AD = 2, CD = 2BD$. 当 $\frac{AC}{AB}$ 取得最小值时, $BD =$ _____.

3. [2024 · 新课标I卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\sin C = \sqrt{2} \cos B$, $a^2 + b^2 - c^2 = \sqrt{2}ab$.

(1) 求 B ;

(2) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $3 + \sqrt{3}$, 求 c .

4. [2022 · 新高考全国I卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\frac{\cos A}{1 + \sin A} = \frac{\sin 2B}{1 + \cos 2B}$.

(1) 若 $C = \frac{2\pi}{3}$, 求 B ;

(2) 求 $\frac{a^2 + b^2}{c^2}$ 的最小值.

典型例题

类型一 三角形中线

例 1 [2023 · 新课标Ⅱ卷] 记 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 已知 $\triangle ABC$ 面积为 $\sqrt{3}$, D 为 BC 的中点, 且 $AD=1$.

(1) 若 $\angle ADC = \frac{\pi}{3}$, 求 $\tan B$;

(2) 若 $b^2 + c^2 = 8$, 求 b, c .

自测题

[2024 · 滁州三模] 在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $2b\cos C - c = 2a$.

(1) 求角 B 的大小;

(2) 若 $a = 3$, 且 AC 边上的中线长为 $\frac{\sqrt{19}}{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

类型二 三角形角平分线

例 2 [2024 · 长郡中学模拟] 已知在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c , 其中 $a = 4$, $4\sqrt{3}\cos C = \sqrt{3}b - c\sin A$.

(1) 求角 A 的大小;

(2) 已知直线 AM 平分 $\angle BAC$, 且直线 AM 与 BC 交于点 M , 若 $AM = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, 求 $\triangle ABC$ 的周长.

自测题

[2024 · 山东泰安模拟] 已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b(\sin B + \sin C) = (a - c)(\sin A + \sin C)$.

(1) 求角 A 的大小;

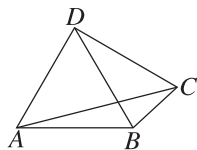
(2) 若内角 A 的平分线 AD 交 BC 于 D 点, $9b + c = 64$, 求 AD 的最大值.

类型三 四边形问题

例3 [2024·安庆二模] 如图,在平面凸四边形 $ABCD$ 中, $\tan \angle ABD + \tan \angle ADB = \frac{2\sin \angle BAD}{\cos \angle ABD}$.

(1)求 $\angle ADB$;

(2)若 $AD=BD=4$, $\angle ACB = \angle BDC = \frac{\pi}{6}$,求 CD .

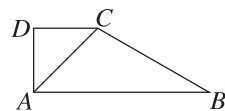


自测题

[2024·福建漳州质检] 如图,在平面四边形 $ABCD$ 中, $\angle DAB = \frac{\pi}{2}$, $B = \frac{\pi}{6}$,且 $\triangle ABC$ 的外接圆半径为 4.

(1)若 $BC=4\sqrt{2}$, $AD=2\sqrt{2}$,求 $\triangle ACD$ 的面积;

(2)若 $D = \frac{2\pi}{3}$,求 $BC-AD$ 的最大值.



【规律提炼】

1. 解三角形实际就是利用正余弦定理及三角恒等变换等三角知识解决边角关系问题;
2. 在解决多三角形问题时,要关注题目中几何性质的应用,如求中线长时可结合平面向量知识,注意角平分线定理的运用,当四点共圆时注意对角互补等.

